Projet : Algo pour les mathématiques appliquées

I. Équation du second degré

A. Rappels

On considère l'équation suivante, où a, b et c désignent des nombres réels et a est différent de 0 :

$$ax^2+bx+c=0.$$

Le discriminant de l'équation est la valeur Δ définie par : $\Delta=b^2-4ac$.

Il y a dès lors 3 cas de figure :

- Si le discriminant est strictement positif, l'équation admet deux solutions x1 et x2 données par les formules suivantes :

  $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si le discriminant est nul, l'équation admet une racine double :

  $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$.

- Si le discriminant est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle.

B. Programme de calcul

☐

A faire vous-même 1. Racines d’ une équation du second degré

Écrivez un programme qui :

- demande les nombres a, b et c de l’ équation du 2nd degré à résoudre
- calcul le discriminant
- suivant la valeur du discriminant, affiche les 2 ou 1 ou 0 solutions

Ajoutez de la programmation défensive afin que ce programme ne se mette jamais en erreur

```
def equation_second_degre(a, b, c):
    """Calcul de la racine d' une équation du 2nd degré ax²+bx+c
    @params :
    - a : coef du terme de degré 2
    - b : coef du terme de degré 1
    - c : coef du terme de degré 0
    @returns :
    - 2 ou 1 ou None
    """
    #Vérification que les coef sont au bon type
    #Calcul du discriminant
    #Calcul des racines suivant le discriminant
    return solution
```

II. Racine d’ une équation

A. Rappel

Voir la vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=V7mlMCSrq1U

B. Programme de calcul

☐

A faire vous-même 2. Calcul d’ une racine d’ une équation par dichotomie

Programmez la fonction :

```
def racine(fonc, a, b, p=1e-6):
    """Calcul de la racine d' une fonction par dichotomie
    @params :
    - fonc : fonction python
    - a : borne plus petite que la racine
    - b : borne plus grande que la racine
    - p : précision (ou écart max entre la sol. et valeur théorique)
    @returns :
    - Une valeur approchée de la racine
    """
    #Vérification que les images fonc(a) et fonc(b) sont bien de
    signes contraires

    #Calcul itératif

    return solution
```

A faire vous-même 3. Racine d’ une équation par dichotomie (algo récursif pour les rapides)

☐

Programmez la fonction récursive

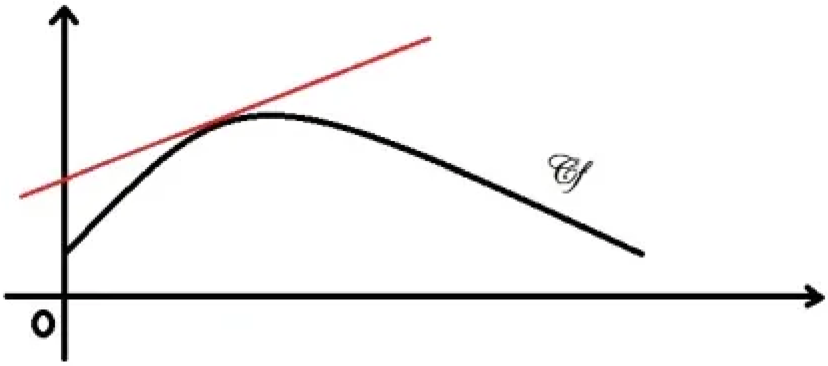
III. Calcul du nombre dérivé en un point

A. Théorie

Voir la vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=UmT0Gov6yyE
Le lien entre limite et dérivée est très simple : si on a un point d'abscisse a, on a la relation suivante :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Graphiquement, le nombre dérivé nous permet de trouver l' équation de la tangente :



L'équation de la tangente AU POINT D'ABSCISSE a est la suivante :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

En fait, $f\,'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
La dérivé permet donc de connaître l'équation de la tangente, de pouvoir calculer quelques limites de formes indéterminées, et surtout de connaître le sens de variation d'une fonction !!
C'est pour cette dernière application qu'elle est la plus utilisée.
La dérivée est également utile dans les équations différentielles, que l'on voit en Terminale, qui sont des équations reliant une fonction et sa dérivée.
L'intérêt est que de nombreux phénomènes physiques sont régis par des équations différentielles, et il faut donc savoir les résoudre pour pouvoir étudier les grandeurs mises en jeu.

B. Programme de calcul

A faire vous-même 4. Calcul du nombre dérivé en un point

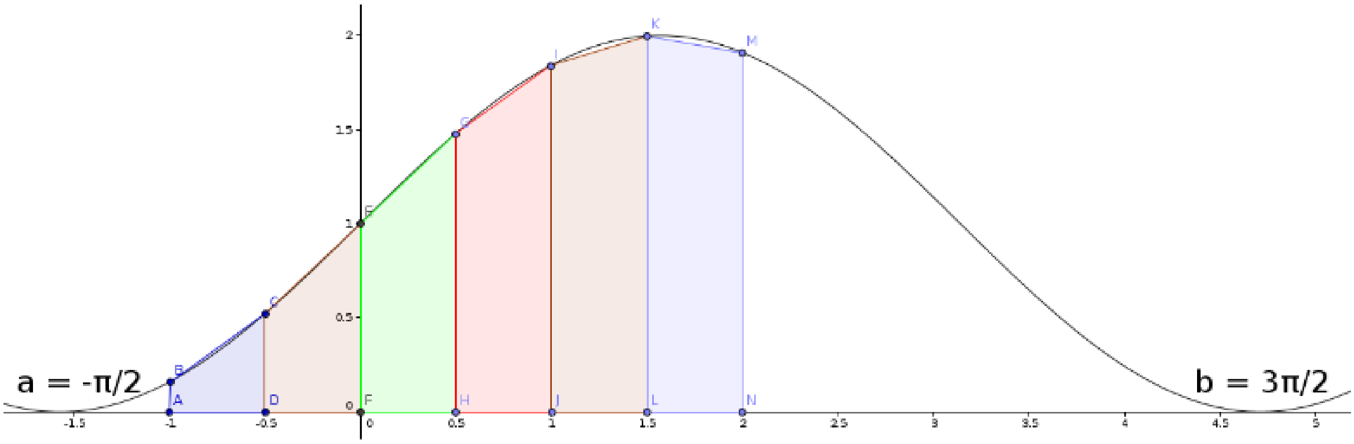
Programmez la fonction :

```
def derive(fonc, a, h=1e-3, p=1e-6):
    """Calcul du nombre dérivé d' un fonction en un point
    On divise par deux l' intervalle à chaque itération
    @params :
    - fonc : fonction python
    - a : point dont on veut la valeur du dérivé
    - h : écart initial
    - p : précision voulue (ou écart entre deux valeurs de dérivé
successives)
    @returns :
- Une valeur approchée du nombre dérivé
>>> derive(lambda x:x**2, 3)
    6
    >>> derive(lambda x:x**3, 2)
    12
    """
    #Vérification que (f(a)-f(a+h))/h est supérieur à p


    #Calcul itératif


    return solution
```

IV. Calcul de l’ intégrale d’ une fonction

A. Théorie de la méthode des trapèzes

L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale d’ une fonction sur un intervalle défini [a, b] à l'aide de la méthode des trapèzes. Cette méthode consiste à découper l'intervalle choisi en n trapèzes de même largeur dont on sait calculer l'aire.



La somme des aires des trapèzes est une approximation de l'intégrale de cette fonction sur l'intervalle [a, b]. Plus le nombre de trapèzes est important, meilleure est l'approximation.

L'expression de la largeur l d'un trapèze est : $l=\frac{b-a}{n}$ où a et b sont les bornes de l'intervalle choisi pour le calcul et n le nombre de trapèzes dont on doit calculer l'aire.

L'expression de l'aire du trapèze ABCD dans la copie d'écran ci-dessus est :

$$\frac{AD\cdot(AB+DC)}{2}=l\cdot\frac{f(A)+f(D)}{2}$$

En se basant sur les bornes de l'intervalle [a, b], l'expression de l'aire de chaque trapèze est de la forme :

- Trapèze 1 : $l\cdot\frac{f(a)+f(a+l)}{2}$
- Trapèze 2 : $l\cdot\frac{f(a+l)+f(a+2l)}{2}$
- …

B. Programme de calcul

A faire vous-même 5.

Programmez la fonction itérative.

C. Intégrale d’ une fonction par dichotomie

A faire vous-même 6. (algo récursif pour les rapides)

L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale d’ une fonction sur un intervalle défini [a, b] à l'aide de la méthode du point milieu. Cette méthode consiste à découper de manière récursive l'intervalle choisi en rectangles de largeur $\frac{(a-b)}{2^n}$ dont on sait calculer l'aire.